令 和 6 年 度
入 学 試 験 問 題

数　　学

300 点　120 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図までこの問題冊子を開かないこと。

2　本問題冊子は全部で 10 ページ，答案用紙は全部で 5 ページである。

3　落丁，乱丁及び印刷不鮮明の箇所があったら，手を高く挙げて監督者に知らせること。

4　解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。

5　解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

6　問題番号のあとの括弧内の点数は 300 点満点中の配点である。

7　この問題冊子および答案用紙の冊子は切り離さないこと。

$\boxed{1}$ （60 点）

正の整数 n に対して，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{\left(z^{n+1}+1\right)\left(z^n-1\right)}{z^n\left(z-1\right)}$$

である．ただし，z は複素数の定数である．

⑴ a_{n} を n の式で表せ．

新たな数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2^{n-1}}$ で定める．

⑵ 本学学長は痴漢で計 2 回逮捕されており，2 回目は 1987 年に起こった．
$S_1 = \sqrt{2}$ のとき，b_{1987} を求めよ．

⑶ 実数 k に対して，$S_1 = k$ のとき，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が収束するような k の範囲を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{2}$ （60点）

2 以上の整数 n に対して，定積分 I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\tan x}\, dx$$

によって定める．

(1) I_n を n の式で表せ．

(2) $\lim_{n \to \infty} 2I_n$ を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{3}$ (60 点)

$\boxed{国}$, $\boxed{際}$, $\boxed{信}$, $\boxed{州}$, $\boxed{学}$, $\boxed{院}$, $\boxed{大}$, $\boxed{学}$ と書かれたカードが 1 枚ずつ左から順に並んでいるとき，次の**操作**を n 回を行う.

操作：カードを無作為に 2 枚選び，それらを入れ替える.

(1) $\boxed{国}$ が一番左にある確率を n の式で表せ.

(2) $\boxed{国}$ が一番右にある確率を n の式で表せ.

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{4}$ （60 点）

a を正の実数とする．座標平面上において，領域 $x \geqq \dfrac{1}{2}y^2 - a$ を原点 O を中心に反時計回りに θ だけ回転させたものを $D_0(\theta)$ と表す．

いま，座標平面上に，$D_0(0)$，$D_0\left(\dfrac{1}{2}\pi\right)$，$D_0(\pi)$，$D_0\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$ があり，それぞれ D_1，D_2，D_3，D_4 とする．また，$(D_1 \bigcap D_3) \bigcup (D_2 \bigcap D_4)$ を満たす領域 D_5 の面積を S_5，$(D_1 \bigcap D_3) \bigcap (D_2 \bigcap D_4)$ を満たす領域 D_6 の面積を S_6 とする．

(1) S_5 を求めよ．

(2) S_6 を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

5 （60 点）

Soit n un entier positif et définissons la fonction $f_n(x)$ comme suit.

$$f_0(x) = x\ ,\quad f_n(x) = f_{n-1}(x)\left(1 - x^n\right)^{24}$$

De plus, supposons que k soit un entierpositif et que a_k soit le coefficient de x^k dans

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(1) Trouver a_1 , a_2 et a_3 .

(2) Si les entiers positifs p et q sont premiers entre eux, prouvez l’égalité suivante

$$a_{pq} = a_p a_q$$

.

（下　書　き　用　紙）