数学問題

(令和 6 年度 国際信州学院大学理学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 75 分である.
2. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない．ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと.
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること.
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること.
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること．解答用紙の裏面に記入してはいけない.
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない.
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい.
8. 試験終了時刻まで退室を認めない．試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと.
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること.

1 (25 点)

以下の問いに答えよ．ただし，実数 x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ と書く．

太郎： 花子さん，リンゴ取りゲームをしない？

花子： いいわね．そういえばふと気になったんだけど，r, s を $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$ を満たす正の無理数とすると，任意の正の整数は，数列 $\{a_n^r\}=\lfloor rn \rfloor$ と $\{a_n^s\}=\lfloor sn \rfloor$ のちょうど一方に1度だけ現れるんじゃないかしら．

太郎： そうだね．それよりルールを説明するよ．今ここにはリンゴの山が 2 山あって，それぞれ x 個と y 個のリンゴが積まれているよ（$x<y$）．ここから交互にリンゴを取り合っていって，最後にリンゴを取った方が勝ち．ただし，プレイヤーは (I) 片方の山から任意個取るか，(II) 両方の山から同数任意個取るか，のどちらかを都度選ぶことができるよ．

花子： 分かったわ．ところで今 x と y はいくつ？

太郎： $x=22$，$y=36$ だね．じゃあ僕が先手で行くよ．

花子： なら私の勝ちね，かかってきなさい．

太郎： えっ，どうして？

(1) 下線部を証明せよ．

(2) n を正の整数とする．$x=\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}n \right\rfloor$，$y=\left\lfloor \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}n \right\rfloor$ のときに限り，後手は，適切な取り方をすれば必ず勝てることを示せ．

2

(30 点)

数学における図と論理的演繹の関係について 1500 字程度で論じよ.

3

(25 点)

7 月 14 日は本学初代学長コナン・ロシュフォールの誕生日である. 2^n の先頭 3 桁が 714 となるような正の整数 n が存在することを示せ. ただし, $n = 1800$ がそのような n であることを示すために 2^{1800} を直接手計算する, という証明方法も認める.

4

(20 点)

以下は，1882 年 7 月発行『数理書院月報』第 2 号（数理学舎）に掲載された問題である．

> i. 中心ヲ凹圓線ノ中軸徑中ニ占メ或定長ノ半徑ヲ以テ一定圓線ヲ畫キ此圓線ノ外邊ト凹圓線ノ內邊ニ切シテ極大ナル一圓線ヲ畫スレハ其中心ト其凹圓ニ切スル點ト定圓心ノ三點ハ一直線ヲナスナリ証如何又定圓心ト凹圓ノ岐點間ノ距離，中軸徑ノ三分ノ一ヨリ大ナルニ非ラザレハ本題ハ成立セサル㆒ヲ顯ハセ
>
> ii. 前題ニ於テ定圓無窮大ナル㆑他ノ一圓ノ徑ヲ求ムル㆒如何

(1) 各問いの文章を現代的な表現に改めよ．

(2) 各問いに解答せよ．

5

(25 点)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^{2024} + x_2^{2024} + \cdots + x_n^{2024}}{x_1^{44} + x_2^{44} + \cdots + x_n^{44}} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{45}$$

を示せ．

6

(25 点)

以下のような規則を満たす**リンゴ算** 🍎 および**青リンゴ算** 🍏 を考える．

i. x 🍎 $0 \neq 1$

ii. x 🍎 $0 = x$ 🍎 0 ならば $x = y$

iii. x 🍎 $1 = x$

iv. x 🍎 $(y$ 🍎 $0) = (x$ 🍎 $y)$ 🍎 0

v. x 🍏 $1 = 1$

vi. x 🍏 $(y$ 🍎 $0) = (x$ 🍏 $y)$ 🍎 x

vii. $x \neq 1$ ならば，y 🍎 $0 = x$ であるような y が存在する．

以下，任意の正の整数 n と，n 個の 0 に対し，

$$(\ldots(0 \text{ 🍎 } 0)\cdots \text{ 🍎 } 0) \text{ 🍎 } 0$$

を 🍎$_n$ と書く．次を証明せよ．

(1) 1 🍎 $0 = 0$

(2) 🍎$_m$🍎🍎$_n$=🍎$_{m+n}$

(3) 🍎$_m$🍏🍎$_n$=🍎$_{mn}$

(4) $m \neq n$ ならば，🍎$_m \neq$🍎$_n$