# 数学問題

(令和 5 年度　国際信州学院大学理学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 75 分である．
2. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない．ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと．
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること．
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること．解答用紙の裏面に記入してはいけない．
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない．
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい．
8. 試験終了時刻まで退室を認めない．試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと．
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること．

$\boxed{1}$

(30 点)

以下はカント『純粋理性批判』序論の一部，およびフレーゲ『算術の基礎』におけるカントへの反論の一部である．両者の主張は一見，下線部 (a)(b) において食い違っているかのように見える．両著作の知識を踏まえ，なぜこのような事が生じたか，特にカントが下線部 (a) の記述をどのように正当化したと考えられるか論述せよ．

**〈カント〉** Denn ich nehme zuerst die Zahl 7, und, indem ich für den Begriff der 5 die Finger meiner Hand als Anschauung zu Hilfe nehme, so tue ich die Einheiten, die ich vorher zusammennahm, um die Zahl 5 auszumachen, nun an jenem meinem Bilde nach und nach zur Zahl 7, und sehe so die Zahl 12 entspringen. Daß 7 zu 5 hinzugetan werden sollten, habe ich zwar in dem Begriffe einer Summe $= 7 + 5$ gedacht, aber nicht, daß diese Summe der Zahl 12 gleich sei. Der arithmetische Satz ist also jederzeit synthetisch; (a) <u>welches man desto deutlicher inne wird, wenn man etwas größere Zahlen nimmt</u>, da es dann klar einleuchtet, daß, wir möchten unsere Begriffe drehen und wenden, wie wir wollen, wir, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, vermittels der bloßen Zergliederung unserer Begriffe die Summe niemals finden könnten.

**〈フレーゲ〉** Und ist es denn unmittelbar einleuchtend, dass $135664 + 37863 = 173527$ ist? Nein! und eben dies führt Kant für die synthetische Natur dieser Sätze an. Es spricht aber vielmehr gegen ihre Unbeweisbarkeit; denn wie sollen sie anders eingesehen werden als durch einen Beweis, da sie unmittelbar nicht einleuchten? Kant will die Anschauung von Fingern oder Punkten zu Hilfe nehmen, wodurch er in Gefahr geräth, diese Sätze gegen seine Meinung als empirische erscheinen zu lassen; denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine. Der Ausdruck »Anschauung« scheint auch nicht recht zu passen, da schon 10

Finger durch ihre Stellungen zu einander die verschiedensten Anschauungen hervorrufen können. Haben wir denn überhaupt eine Anschauung von 135664 Fingern oder Punkten? Hätten wir sie und hätten wir eine von 37863 Fingern und eine von 173527 Fingern, so müsste die Richtigkeit unserer Gleichung sofort einleuchten, wenigstens für Finger, wenn sie unbeweisbar wäre; aber dies ist nicht der Fall.

(b) Kant hat offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt. Dann würden die Formeln für grosse Zahlen beweisbar sein, die für kleine durch die Anschauung unmittelbar einleuchten. Aber es ist misslich, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, besonders da eine scharfe Grenze nicht zu ziehen sein möchte. Wenn die Zahlformeln etwa von 10 an beweisbar wären, so würde man mit Recht fragen: warum nicht von 5 an, von 2 an, von 1 an?

$\boxed{2}$ (25 点)

**素数定理**とは，正の整数 $n$ に対し $\pi(n)$ を $n$ 以下の素数の個数とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}}=1$$

が成り立つとする定理である．1790 年代にルジャンドルやガウスによって予想されたこの定理は，1896 年，ド・ラ・ヴァレー・プーサンとアダマールによって独立に証明され，その後もいくつかの別証が与えられている．

さて，**素数定理を使わずに**以下を示せ．ただし，$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}a_i$ は $a_1a_2\ldots a_n$ を意味する．

(1) $d,a$ を任意の互いに素でない正の整数とする．$p\equiv a \pmod d$ となる素数 $p$ の個数は 1 以下である．

(2) $\varphi(n)$ を $n$ と互いに素な $n$ 以下の正の整数の個数，$p_i$ を $i$ 番目に小さい素数，$N_r=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}p_i$ とすると，$\varphi(N_r)=N_r\displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$

(3) $\dfrac{N_r}{\varphi(N_r)}\geqq\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}$

(4) $\pi(n)\leqq d+\dfrac{\varphi(d)}{d}n+\varphi(d)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}=0$

$\boxed{3}$

(25 点)

本学学長が痴漢で逮捕された年は 1977 年と 1987 年である．$x^{x^x}$ を 1987 で割った余りが 1977 となる正の整数 $x$ が存在することを示せ.

$\boxed{4}$

(25 点)

$n$ 人の生徒がおり，うち数組の生徒は恋愛関係にある．性の制約はないものとし，恋人は何人でも持ってよいが，どの 2 人の生徒も共通の恋人を 2 人以上持ってはいけない．このとき，恋愛関係にある生徒の最大組数を $f(n)$ とする．例えば，$n = 5$ のとき $f(n) = 6$ である．以下を示せ.

(1) $f(kn) \geqq kf(n) + kn$ となる正の整数 $k$ が存在する.

(2) $n > 2$ のとき，$f(n) \leqq \dfrac{nf(n-1)}{n-2}$

(3) $\lfloor x \rfloor$ を $x$ 以下の最大の整数とすると，$f(n) \geqq \left\lfloor \dfrac{3(n-1)}{2} \right\rfloor$

$\boxed{5}$ (20 点)

$\alpha$ を有理数とする．$\dfrac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$ を示せ．

$\boxed{6}$ (25 点)

サトシ君とコサックダンス吉村君は，以下の**移動**を繰り返し，12 離れた位置にある目的地まで競走を行う．

**移動**　最初にサトシ君が偏りのないさいころを振り，出目の距離だけ進む．
次にコサックダンス吉村君もさいころを振り，出目にサトシ君との距離の逆数をかけた距離だけ進む．ここまでを 1 回目の移動とする．
$n$ 回目の移動では二人とも，サトシ君を先攻として，さいころの出目にその時点での二者間の距離の逆数をかけた距離だけ進む．ただし，二者間の距離が 0 の場合はそこで競走を中止する．

(1) $n$ 回目の移動でどちらかが中止する確率 $p_n$ を求めよ．

(2) この競走にコサックダンス吉村君が勝つ確率 $q$ を求めよ．