# 数学問題

(令和 5 年度　国際信州学院大学国際観光学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分である.
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない. ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと.
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること.
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること.
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること. 解答用紙の裏面に記入してはいけない.
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない.
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい.
8. 試験終了時刻まで退室を認めない. 試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと.
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること.

$\boxed{1}$ (30 点)

$\alpha$ を有理数とする．$\dfrac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$ を示せ．

$\boxed{2}$ (30 点)

$n$ 人の生徒がおり，うち数組の生徒は恋愛関係にある．性の制約はないものとし，恋人は何人でも持ってよいが，どの 2 人の生徒も共通の恋人を 2 人以上持ってはいけない．このとき，恋愛関係にある生徒の最大組数を $f(n)$ とする．例えば，$n = 5$ のとき $f(n) = 6$ である．以下を示せ．

(1) $f(kn) \geqq kf(n) + kn$ となる正の整数 $k$ が存在する．

(2) $n > 2$ のとき，$f(n) \leqq \dfrac{nf(n-1)}{n-2}$

$\boxed{3}$ (30 点)

正の整数からなる無限集合 $S$ は，どの 2 個の元も倍数の関係にないという．このとき，$S$ の元の素因数は無数にあることを示せ．

$\boxed{4}$ (30 点)

以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3x(1+\cos x)}{\sin x}\,dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3\cos x+\sqrt{8+\cos^2 x}}{\sin x}x\,dx$ を計算せよ．

$\boxed{5}$ (30 点)

道玄坂君は偏りのない硬貨を $n$ 回投げ，$X_1$ 回表が出たという．この後，道玄坂君は $i \geqq 1$ に渡って $X_i$ 回コインを投げ，そのとき $X_{i+1}$ 回表が出たという．以下の問いに答えよ．

(1) $E(X_2) = \dfrac{1}{4}n$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)$ を求めよ．

次に，道玄坂君は $n$ 枚の同じ硬貨を持ち寄り，裏が出るまで 1 枚目を投げ続けた．このとき $Y_1$ 回表が出たという．この後，道玄坂君は $1 \leqq i \leqq n$ に渡って $i$ 枚目のコインを裏が出るまで投げ，そのとき $Y_i$ 回表が出たという．$Y(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ とする．以下の問いに答えよ．

(3) $E(Y(n))$ を求めよ．

(4) $r \in [0,1]$ に対し，$Y(n) = r$ となる確率 $p(r,n)$ を求めよ．