数学問題

(令和 3 年度　国際信州学院大学理学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 75 分である.
2. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない．ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと.
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること.
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること.
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること．解答用紙の裏面に記入してはいけない.
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない.
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい.
8. 試験終了時刻まで退室を認めない．試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと.
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること.

$\boxed{1}$ (40 点)

複素数 $z = x + iy$ に対し，

$$\mathrm{Re}(z) = x$$
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

とする．以下を証明せよ．

(1) $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ のうち少なくとも 1 つは無理数である．

(2) $r^4 + 1 = s^2$ を満たす正の有理数 r, s に対し，

$$r^* = \begin{cases} r & (r < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{r} & (r > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とし，s^* も同様に定義する．$\min(r^*, s^*) \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq \max(r^*, s^*)$ を満たす複素数 z に対し，$\zeta(z) = 0$ ならば

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

である．

$\boxed{2}$ (35 点)

本学理学部は 1989 年に開設された．

$$\sqrt{1!\sqrt{2!\sqrt{3!\cdots\sqrt{1989!}}}} < 1\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{2021}}}} < 3$$

を証明せよ．

3

(35 点)

あなたは友人の Fermat 君から次の手紙を受け取った.

0 est égal à 1. Au contraire, il est impossible de choisir deux nombres quelconques pour qu'ils soient différents. J'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette fois cette marge peut facilement contenir.

Soit $f(x)$ *une fonction différentiable qui satisfait* $f(x) \neq 0$ *en tout nombre réel* x.

Par intégration par parties,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = f(x)\frac{1}{f(x)} - \int f(x)\frac{-f'(x)}{(f(x))^2} dx = 1 + \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Donc, $0 = 1$. *Multiplier par n'importe quel nombre* n, *on obtient* $0 = n$.

P. de Fermat

この手紙に記されている主張の誤りを指摘する返信の手紙を書け.

4

(40 点)

「H」「I」「K」「N」「O」「S」「U」のうち 1 文字が記入されたカードが，各文字ごとに n 枚ずつある．ただし $n \geqq 2$ とする．これらの入った袋からカードを元に戻さず 1 枚ずつ取り出し，計 m 枚を取った順に左から並べて文字列を作る．この文字列の中に「KOKUSHIN」という連続する並びが含まれる確率を $p(m, n)$ とする．m が $8 \leqq m \leqq 7n$ の範囲から無作為に選ばれるとき,

$$p(m, n) \geqq \frac{1}{2}$$

となる確率 $P(n)$ を求めよ.