

数学問題

(令和 4 年度 国際信州学院大学理学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 75 分である。
2. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開いてはいけない。ただし, 表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. 問題冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は, 手をあげて監督者に申し出ること。
4. 試験開始後, 解答用紙の所定の欄に, 受験番号と氏名を記入すること。
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
6. 解答用紙を切り離したり, 持ち帰ってはいけない。
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
8. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等, やむを得ない場合には, 手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

1

(30点)

n を自然数とする. $3n$ 人がそれぞれリンゴを1つずつ持ち寄り, 交換会を開く. ただし, 持参するリンゴの品種は, n 人が「大紅栄」, 別の n 人は「秋映」, 残りの n 人は「シナノゴールド」である. リンゴの交換は以下の手順に沿って行う.

外見の区別のつかない袋を $3n$ 枚用意し, 各袋にリンゴを1つずつ入れる. 袋をでたらめに選んで, 各参加者に1つずつ配る. 各参加者は配られた袋の中のリンゴを受け取る.

交換の結果, 自分の持参した品種のリンゴを受け取ったと判断した参加者が1人でもいた場合は, 交換をやり直す. もしそのような人が全くいなくなれば, 交換会は終了となる. ただし, 各参加者は $\frac{2}{5}$ の確率で「大紅栄」を「秋映」, $\frac{1}{5}$ の確率で「秋映」を「大紅栄」と誤って判断してしまう. このとき, 以下の確率を求めよ.

- (1) 「秋映」を「大紅栄」と誤って判断した人がいるとき, その回で交換会が終了しない条件付き確率 p_n .
- (2) 100 回目の交換で交換会が終了しない確率 q_n .

2

(30点)

複素数平面上の点 $x + yi$ と座標平面上の点 (x, y) は互いに対応するため, これらは同一視できる. しかしながらあなたが経験したように, 実際には複素数平面を用いた解法と座標平面を用いた解法を適宜使い分けることが必要となる. この差が生じる要因について, あなたの考えを詳細に書け.

3

(30 点)

集合 S を

$$S = \{ \{a_n\} \mid \{a_n\} \text{ は自然数の項からなる無限数列} \}$$

とし、 S の部分集合 T を任意に取る。サトシ君とコサックダンス吉村君はこの T を予め与えられている。いま、サトシ君を先攻として交互に自然数を言い合い、無限数列を作るというゲームを行う。この無限数列が T に含まれればサトシ君の勝ち、そうでなければコサックダンス吉村君の勝ちとなる。サトシ君がこのゲームで必ず勝つためにはどのような戦略でゲームを進めればよいか。

4

(30 点)

5^π は整数か。

5

(30 点)

n 個のリングを、どの 2 つの間の距離も異なるように平面上に置く。リング X から最短距離にあるリングを **la voisine de X** と呼ぶ。各リング X に対する la voisine de X に印を付け (1 つのリングに何回印が付いても良い)、印のついたリングの個数を $A(n)$ とする。以下を証明せよ。

(1) リング A に印が 5 つ付いたとき、 B が la voisine de A でありかつ A が la voisine de B であるようなリング B が存在する。

(2) $A(n) \geq \frac{2}{9}n$

