数学問題

(令和 4 年度　国際信州学院大学国際観光学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分である．
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない．ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと．
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること．
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること．解答用紙の裏面に記入してはいけない．
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない．
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい．
8. 試験終了時刻まで退室を認めない．試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと．
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること．

$\boxed{1}$

(30 点)

半径 a の完全な球とみなせるリンゴがある．高さ $2a$，底面の半径 a の透明な円柱状の筒の中にリンゴを入れ，筒の側面にリボンをたるまずちょうど 1 周するよう巻き付ける．ただし，リボンの各端点はそれぞれ側面上の高さ $2a$ および 0 の位置にある．側面を囲む全方位からこの円柱に光を当てるとき，リンゴに投影されるリボンの影の全長を求めよ．

$\boxed{2}$

(30 点)

n を自然数，$\pi(n)$ を n 以下の素数の個数とする．以下の不等式を証明せよ．

(1)

$$\pi(n) \leqq \frac{2}{3}n$$

(2) $n \geqq 35$ のとき

$$n \geqq \sum_{i=1}^{2022} \pi^{(i)}(n)$$

ただし，$\pi^{(i)}(n)$ は $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi}_{i\ \text{回}}(n)$ を指す．

$\boxed{3}$

(30 点)

n 個のリンゴを，どの 2 つの間の距離も異なるように平面上に置く．各リンゴから最短距離にあるリンゴに印を付け（1 つのリンゴに何回印が付いても良い)，印のついたリンゴの個数を $A(n)$ とする．以下を証明せよ．

(1) リンゴに付いた印の数は 5 以下である．

(2) $A(n) \geqq \dfrac{1}{5}n$

$\boxed{4}$ (30 点)

以下の問いに答えよ.

(1) $2n$ 以下の自然数を 2 つのグループに分け，一方を小さい順に並べ数列 $\{a_n\}$ を作り，もう一方を大きい順に並べ数列 $\{b_n\}$ を作る.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 整数を係数とする x の多項式 $P(x)$ が

$$(x-2022)P(x) + 2022 = xP(x-1)$$

を満たすとき，$P(x)$ は定数以外の因数を持たないことを証明せよ.

$\boxed{5}$ (30 点)

以下の問いに答えよ.

(1) n, k を $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とするとき，

$$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} = (n+1)\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

を証明せよ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_{n-3}}$ の値を求めよ.