

数学問題

(令和 2 年度 国際信州学院大学理学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 75 分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
4. 試験開始後、解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
6. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
8. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

1

(30 点)

ある自然数 n の正の非自明な約数の総和は n であるという。このとき、以下の問いに答えよ。ここで、 n の非自明な約数とは、1 と n 以外の n の約数を指す。

(1) そのような n の例を挙げよ。

(2) n は奇数 k を用いて

$$n = k^2$$

と表せることを示せ。

(3) r が $2n + 1$ の正の約数であるとき、 r を 8 で割った余りは 1 または 3 であることを示せ。

2

(30 点)

正方形の境界もしくは内部に収まる正三角形のうち面積が最大のものを、定規とコンパスを用いて作図せよ。解答には解答用紙の所定の欄を用いよ。

3

(30 点)

次の不等式を証明せよ。

(1) $e^{\pi+e} > \left(\frac{\pi^2 + e^2}{2}\right)^e$

(2) $x > 0$ に対し、 $x^{x^{x^{x^x}}} \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

4

(30点)

自然数 n に対し, $f(n)$ を $n^k \geq n!$ を満たす最小の自然数 k とする.

$$a_n = \frac{f(n)}{n}$$

とするとき, 数列 $\{a_n\}$ は収束するか.

5

(30点)

角速度 θ で回転する半径 r の円盤がある. はじめこの円盤は静止しており, 南端にはバッタが止まっている. このバッタは自身から見て常に一定の速度 v で正面に動く.

最初に円盤が回転を始めると同時にバッタは真北を向いて動き始め, 円盤の端にたどり着くまでは常に真北を目指して動き続ける. ここまで, バッタが動き始めてから最初に端にたどり着くまでの動作を M_1 とする.

続けて $n \geq 2$ に対し, バッタは動作 M_{n-1} を終了後すぐに次の動作のいずれかを動作 M_n としてそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で選択する.

- A_1 : 真逆の方向を向き, 再び端にたどり着くまでその方向へと動き続ける.
- A_2 : 円盤の中心方向を向き, このときにちょうど向かい合った端点にたどり着くまでその点を目指して動き続ける.
- A_3 : 動作 M_{n-1} の所要時間と同じ時間だけその点に静止する.

このとき, M_n までの**バッタ時間**および**バッタ長さ**とは M_1 開始から M_n 終了までの総所要時間およびバッタの描いた軌道の総長である. 以下の問いに答えよ.

- (1) M_1 までのバッタ時間 T およびバッタ長さ L を求めよ.
- (2) M_n までのバッタ時間の期待値 D_n およびバッタ長さの期待値 E_n を求めよ.

