数学問題

(令和 2 年度　国際信州学院大学国際観光学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分である．
2. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない．ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと．
3. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること．
4. 試験開始後，解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること．解答用紙の裏面に記入してはいけない．
6. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない．
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい．
8. 試験終了時刻まで退室を認めない．試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと．
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること．

$\boxed{1}$ (30 点)

xy 平面内の点 A$(0,1)$ および点 B について，B が放物線 $C\colon y=x^2$ 上を動くとき，次の条件を満たす点 M が描く曲線を C_m とする．

(i) AM $=$ BM

(ii) MB は C の法線である．

（1）C_m を図示し，C_m が C_m 自身と 1 回だけ交わることを示せ．

（2）（1）によって C_m が囲む領域の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ (30 点)

$2021^n \geqq 2021!$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

$\boxed{3}$ (30 点)

数列 $\{y_n\}$ を次のように定める．

$$\begin{cases} y_n = n & (0 \leqq n \leqq 31) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{31}\displaystyle\sum_{k=0}^{30} y_{n-k} & (n \geqq 31) \end{cases}$$

（1）$\displaystyle\sum_{k=0}^{30}(k+1)y_{n+k}$ は n の値によらない定数であることを示せ．

（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ．

$\boxed{4}$ (30 点)

無作為に自然数 n を選ぶとき，n 年における本学の休校日 (7 月 14 日) が月曜日である確率を p_n とする.

（1）1 年は通常 365 日からなるが，年数 n が次の条件のいずれかを満たすときに限り 366 日となる.

(i) n は 4 の倍数であり，かつ 100 の倍数ではない.

(ii) n は 400 の倍数である.

$p_n \neq \dfrac{1}{7}$ であることを示せ.

（2）自然数 m, n について，n 年が m **- année bissextile である**とは，n が次の条件のいずれかを満たすことをいう.

(i) n は 4 の倍数であり，かつ m の倍数ではない.

(ii) n は $4m$ の倍数である.

n 年が m - année bissextile であるときに限りその日数を 366 日とするとき，

$$p_n = \frac{1}{7}$$

となるような m を全て求めよ.

$\boxed{5}$ (30 点)

領域 $x^2 + 2y^2 \leqq 4$ の内側と境界はそれぞれ泥地と歩道であり，これらの間は瞬時かつ自由に出入りできる．歩道上に 2 地点 $\mathrm{A}(-2, 0), \mathrm{B}(2, 0)$ がある．泥地の k (> 0) 倍の速度で歩道を進むバッタが，A から出発して最も早く B へとたどり着く経路はどのようなものか．ただし歩道・泥地でのバッタの速度はそれぞれ一定である.