

数学問題

(平成 29 年度 国際信州学院大学国際観光学部)

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
4. 試験開始後、解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
5. 回答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
6. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
7. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
8. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
9. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

1

先頭から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の貨物列車がある。 $n \geq 2$ であるとし、動力を持つ車両の存在は無視する。各車両に、リンゴの「夏あかり」「つがる」「秋晴れ」のうち 1 種のみを積む。ただしリンゴは十分にあるとする。隣りあった車両のうち少なくとも一方が「夏あかり」となるような積み方は何通りか。

2

中身の見えない袋の中に、A, E, L, P の文字のいずれか 1 つが書かれた 4 つの球がある。「袋から無作為に球を取り出し、書かれた文字列が記録して袋に戻す」という操作を繰り返し、「APPLE」という文字列が記録されたら作業を終了する。ちょうど n 回の操作で作業を終了する確率を求めよ。

3

(1) 次を示せ。

$$(i) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

(2) $\sum_{k=1}^n k^4$ を n の式として表せ。

4

p を素数とし、 a を $0 < a < p$ なる整数とする。

$$A = \{0, 1, 2, \dots, ap - 1\}$$

$$B = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, p - 1), (1, 0), \dots, (a - 1, p - 1)\}$$

とし、 A から B への関数 l を

$$l(x) = (x \bmod a, x \bmod p) \tag{A}$$

で定める。ここで、 $x \bmod y$ は x を y で割った余りとする。このとき、次を示せ。

- (1) 任意の $x, y \in A$ について、 $l(x + y) = l(x) + l(y)$ が成立する。
- (2) 任意の $(x, y) \in B$ に対して、

$$l(e) = (x, y) \tag{B}$$

となる $e \in A$ が存在する。

5

- (1) 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta \\ y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta \end{cases}$$

で表される曲線がある。これを図示し、この曲線で囲まれる領域の面積を求めよ。

- (2) (1) の曲線と、 x 軸、 y 軸、 $y = \sqrt{x + 1}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。